ABSTRAKSIE EN VERALGEMENING IN DIE WISKUNDE*

Wanneer ek tot u spreek oor abstraksie en veralgemening in die Wiskunde, wil ek u aandag vestig op die belangrikheid daarvaan vir die Wiskunde, maar u terselfdertyd daarop wys dat die wiskundige hom nie langs hierdie weg heeltemal van die werklikheid kan losmaak nie.

Die geskiedenis van die Wiskunde toon 'n voortskrydende abstraksie en veralgemening. Vir die Babiloniërs en Egiptenare was numeriese berekeninge alleen maar 'n middel om kwalitatiewe probleme op te los wat in die alledaagse lewe voorgekom het. By die bou van die piramides sedert ongeveer 2900 v.C. het berekeninge byvoorbeeld 'n uiters belangrike rol gespeel. Die rekenkunde het geleidelik ontwikkel in die rigting van algebra, nie alleen omdat dit beter praktiese berekeninge moontlik gemaak het nie maar ook as die resultaat van die natuurlike ontwikkeling van 'n wetenskap. D. J. Struik merk op: „Oriental mathematics originated as a practical science... However, a science cultivated for centuries by a special craft, whose task it is not only to apply it but also to instruct its secrets, develops tendencies toward abstraction".[1]) Die ontwikkeling van rekenkunde tot algebra dateer uit die tyd van die Babiloniese koning Hammurabi, dus ongeveer 1950 v.C.

Die Griekse wiskunde is vir ons van besondere belang, en het hoofsaaklik bestaan uit meetkunde en die daarmee gepaardgaande logika. Die name van Pythagoras (570—504 v.C.), Archimedes (287—212 v.C.) en Euclides (ongeveer 300 v.C.) is welbekend. Die meetkunde wat vandag nog op ons middelbare skole onderrig word, is in wese die meetkunde van Euclides. Tot in die vorige eeu was dit ook die enigste bekende meetkunde. Hierby word uitgegaan van sekere ongedefinieerde begrippe — in die betrokke geval „punt" en „(reguit) lyn" — en 'n aantal aksiomas of grondstellings oor die ongedefinieerde begrippe. Deur logiese redenasie word dan gevolgtrekkings, d.w.s. stellings, uit die aksiomas afgelei. Hierdie metode staan bekend as die aksiomaties-deduktiewe metode, en teenswoordig poog wiskundiges om hierdie metode uit te brei na (byna) al die vertakkings van die Wiskunde.

---

* Inougurele rede, gelewer op 22 Sept. 1967, by die aanvaarding van 'n professoraat in Wiskunde en Toegepaste Wiskunde, aan die P.U. vir C.H.O.

Alle Griekse aksiomatiese benaderings van die Wiskunde, insluitende dié van Euclides, het onder die titel „Stoicheia" (d.w.s. elemente of grondbeginsels) die lig gesien. Van hierdie aksiomaties-deduktiewe metode is Aristoteles (384—322 v.C.) eintlik die vader. Sy leermeester Plato (427—347 v.C.) het geleer dat die meetkundige hom vry moet maak van die getekende, stoflike figure, wat onvolkomenhede besit, en hom slegs besig moet hou met ideële meetkundige figure in sy gees. Deur logiese redenasie moet hy waarhede omtrent hierdie figure probeer vind. Op een lyn met hierdie gedagtegang van Plato is die algemene wetenskapsleer van Aristoteles, waarin hy die aksiomaties-deduktiewe metode vooropstel. Aristoteles onderskei tussen aksiomas en postulate. Aksiomas is vir hom algemene insigte wat die gemeenskaplike grondslag van alle deduktiewe wetenskappe vorm — byvoorbeeld die geheel is groter as 'n deel —, terwyl postulate spesiale insigte is wat op 'n besondere wetenskap betrekking het. Die postulaat: deur twee punte gaan een en slegs een reguit lyn, sou byvoorbeeld 'n postulaat van die meetkunde wees. Hierdie onderskeiding word vandag nie meer gemaak nie.

Vir die Grieke was hierdie aksiomas en postulate vanselfsprekende waarhede. Dit is nie meer die betekenis wat vandag in die algemeen aan 'n aksiomastelsel geheg word nie. Voordat ons by hierdie wysiging in opvatting nader stilstaan, wil ek vir u die drie hoofstrominge in die moderne wiskunde kortliks skets, nl. die logisisme, intuïsionisme en formalisme. En ek doen dit in soverre dit moontlik is sonder om op tegniese terrein te beweeg.

Paradokse wat in die intuïtiewe versamelingsleer van Cantor ontdek is, het aanleiding gegee tot 'n soeke na nuwe funderings vir die Wiskunde. Dit het bygedra tot die ontstaan van beide die logisisme en die intuïsionisme aan die begin van hierdie eeu.

Frege en Russel, die grondleggers van die *logisisme*, wil die wiskunde sien as 'n voortvloeisel uit die logika. Die belangrikheid van die logika vir die wiskunde is reeds in die vorige eeu beklemtoon. In die eerste helfte van die negentiende eeu lê veral Boole en De Morgan die grondslag van die simboliese logika. Net soos ons in die wiskunde van simbole gebruik maak om matematiese entiteite voor te stel, word in die simboliese logika logiese entiteite en betrekkinge tussen hulle deur simbole voorgestel. Vir die bewerkinge hiermee word dan reëls neergelê. Jevons, Pierce en Schröder bou hierop voort.

Terwyl die logika in die negentiende eeu beskou is as 'n werktuig in diens van die wiskunde, word die klem aan die begin van die twintigste eeu deur Bertrand Russel verplaas. Peano het in die vorige eeu die verhouding van die logika tot die wiskunde gesien as dié van 'n dienskneg tot sy meester. Russel beskou die verhouding eerder as dié van ouer tot kind: die wiskunde is vir hom 'n voortvloeisel uit die logika, 'n verlengstuk van die logika. Die hele wiskunde wil hy op aksiomas van die logika baseer. Hy meen om sodoende die teenstrydighede en paradokse wat in die versamelingsleer ontstaan het en waarmee Frege geen raad geweet het nie, uit te skakel. Frege het reeds in die negentiende eeu beweer dat hy geen skerp skeiding tussen wiskunde en logika kan maak nie. Die onderskeid, die soewereiniteit in eie kring, wil Russel nou geheel en al loën.

Ook die ontwikkeling van die *intuïsionisme* is in 'n sekere mate 'n poging om 'n nuwe fundering vir die wiskunde te vind en sodoende die ontdekte paradokse uit te skakel. Alhoewel die grondslag van hierdie denkrigting eers aan die begin van die huidige eeu deur die Nederlander Brouwer gelê is, word denkbeelde wat in hierdie rigting neig, reeds in die tweede helfte van die vorige eeu by Kronecker aangetref.

Vir Kronecker is die natuurlike getalle, d.w.s. die getalle 1, 2, 3, 4,... sg. intuïtief gefundeer, terwyl die algebraïese getalle en bewerkinge daarmee op die natuurlike getalle en hulle eienskappe gefundeer kan word. Dit gaan vir Kronecker om die vraag na die aard van die matematiese entiteite, die vraag wát wiskunde is. Hy aanvaar die natuurlike getalle en bewerkinge daarmee, maar wil van so iets as „die versameling van alle natuurlike getalle" niks weet nie. Dit sou dui op 'n reeds bestaande oneindige totaliteit. Terwyl die meeste wiskundiges doodtevrede is om met oneindige versamelinge te werk, sien Kronecker en die intuïsioniste (waarvan daar nie veel onder die wiskundiges is nie) die natuurlike getal byvoorbeeld as 'n „steeds groeiende" versameling wat bestaan uit 'n beginversameling van getalle, 1, 2, 3, 4, ens., en 'n reël waarvolgens nuwe elemente van die versameling gekonstrueer kan word, byvoorbeeld $4 + 1 = 5$, $5 + 1 = 6$, ens. Hierdie konstruksie word voortgesit sover as wat ons wil of kan. Maar 'n oneindige versameling kry ons nooit!

Die intuïsioniste eis dat alle definisies en bewyse „konstruktief" moet wees, d.w.s. 'n definisie van 'n matematiese entiteit moet dit moontlik maak om die entiteit te konstrueer. In hierdie sin is „die versameling van alle natuurlike getalle" nie definieerbaar nie. Net so moet die bewys van die bestaan van 'n matematiese entiteit dit vir die intuïsioniste moontlik maak om die entiteit te konstrueer deur die bewys stap vir stap te volg.

Dikwels is dit nie moontlik om die bestaan van 'n matematiese entiteit langs direkte weg aan te toon nie. Die wiskundige gaan in sy bewys dan soos volg te werk: Hy gaan uit van die veronderstelling dat die betrokke entiteit nie bestaan nie. Kom hy nou langs hierdie weg tot 'n teëspraak, d.w.s. 'n resultaat wat met ander erkende matematiese stellings in stryd is, dan maak hy daaruit die gevolgtrekking dat sy veronderstelling verkeerd was — en tot sover sal elke intuïsionis nog saamstem, maar geen tree loop hy verder saam nie as ons dan tot die slotsom kom dat die betrokke entiteit wel bestaan. Argumente van suiwer logiese aard gee vir die intuïsioniste dus nie noodwendig geldige wiskundige stellings nie. Die intuïsionistiese logika is slegs 'n onderdeel van die klassieke logika; die wet van die uitgeslote derde ('n bewering is waar of dis nie waar nie) word deur hulle nie aanvaar nie.

Terwyl die logisisme die wiskunde as 'n voortvloeisel uit die logika sien, beskou die intuïsioniste die logika eerder as 'n onderdeel van die wiskunde, wat deur Brouwer as 'n vrye skepping van die gees bestempel word. Iets bestaan alleen wanneer jy dit in jou gees konstrueer. Bestaan en konstrueerbaarheid word dus deur die intuïsioniste geïdentifiseer. Die konstrueerbaarheid is ook vir hulle die kriterium vir waarheid: as elke stap in die konstruksie intuïtief aanvaarbaar is, bied dit sekerheid.

As ek in enkele woorde hierop kritiek moet lewer, dan wil ek dit stel deur te sê dat die intuïsioniste die mens en sy denke op die voorgrond plaas en daarby uit die oog verloor dat ons alleen maar in staat is om ten dele te ken. Die intuïsionisme is 'n verenging van sowel die metodes as die resultate van die wiskunde.

David Hilbert, die vader van die *formalisme* in die wiskunde, streef na 'n samesnoering van die aksiomatiese en logisistiese metodes. Die hele wiskunde wil hy herlei tot 'n stapel formules of bewerings, waarin naas die wiskundige simbole ook logiese simbole voorkom. Die aksiomas wat as uitgangspunt dien, word nou nie meer as „vanselfsprekende waarhede" beskou, soos die geval vir die Griekse wiskundiges was nie. En die ongedefinieerde begrippe wat gebruik word, het geen ander betekenis nie as dit wat deur die aksiomas daaraan geheg word. Sodoende word die wiskunde geheel en al geformaliseer. Deur logiese redenasie word gevolgtrekkings uit die aksiomas afgelei. Aangesien die ongedefinieerde begrippe van alle betekenis ontdaan is, het dit nou nie meer sin om na die *waarheid* van die afgeleide stellings te vra nie. Daar kan alleen maar na die *geldigheid* daarvan gevra word. En so 'n resultaat is dan geldig as dit bereik is deur die reëls van die logika na te kom.

Tot hierdie geformaliseerde wiskunde wil Hilbert dan 'n nuwe wiskunde, 'n *metawiskunde,* toevoeg. In die gewone wiskunde word beweringe gemaak oor wiskundige entiteite. In die metawiskunde word die veld van ondersoek gevorm deur bewyse van die gewone wiskunde. Metawiskunde is dus niks anders nie as bewysteorie. En hier sluit Hilbert by die intuïsionisme aan wanneer hy eis dat in die metawiskunde alleen maar van 'n eindige aantal intuïtief-aanvaarbare stappe gebruik gemaak mag word.

Vervolgens vra ek u aandag vir die probleme van die aksiomatiese metode. Enige aksiomatiese benadering van die wiskunde het hoofsaaklik met drie probleme te kampe. Ek bespreek hierdie probleme kortliks in die volgorde van toenemende belangrikheid.

In 'n aksiomastelsel wil ons nie graag meer aksiomas (grondstellings) hê as wat nodig is nie, d.w.s. dit moet nie moontlik wees om een of meer van die aksiomas as stelling uit die ander af te lei nie. As hierdie ideaal bereik is, heet die aksiomastelsel *onafhanklik.* Dat dit nie so 'n eenvoudige taak is om vas te stel of dit die geval is al dan nie, sal ek later vir u aantoon deur 'n voorbeeld uit die geskiedenis van die wiskunde. Al sou 'n aksiomastelsel nie onafhanklik wees nie, is dit nie 'n al te groot beswaar nie. Soms word 'n aksiomastelsel selfs doelbewus so opgestel dat dit nie onafhanklik is nie, om daardeur aan helderheid en duidelikheid te wen.

Die tweede probleem van die aksiomatiese metode is die van *volledigheid.* 'n Stelsel aksiomas (bv. oor punte en lyne) heet volledig as *elke* bewering oor die ongedefinieerde begrippe wat in die aksiomas voorkom (in ons voorbeeld punte en lyne), of 'n ontkenning van die bewering, uit die aksiomas afgelei kan word.

Die ernstigste probleem is die van *nie-strydigheid.* 'n Aksiomastelsel heet nie-strydig as dit nie moontlik is om sowel 'n bewering as 'n ontkenning van die bewering uit die aksiomastelsel af te lei nie. Gödel het in 1931 aangetoon dat as 'n aksiomastelsel vir die rekenkunde van heelgetalle nie-strydig is, dit onvolledig is. Daarmee het hy die ideaal van Hilbert om in die metawiskunde vir elke aksiomastelsel 'n bewys van nie-strydigheid te verskaf omvergewerp.

In die voorgaande het ek probeer aantoon dat die formalisme die wiskunde heeltemal van die werklikheid wil losmaak. E. Nagel stel dit soos volg wanneer hy Grassmann aanhaal: „Formal sciences are characterized by the fact that their sole principles of procedure are the rules of logic as wel as by the further fact that their theorems are not 'about' some phase of the existing world but are 'about' whatever is *postulated* by thought".[2])

Ons kom egter nie tot so 'n aksiomastelsel anders as langs 'n weg van voortskrydende abstraksie en generalisasie nie, telkens uitgaande van die getals- en ruimtelike aspekte van die geskape werklikheid. B. E. Meserve druk dit soos volg uit: „In most, if not all, elementary mathematical systems the axioms (postulates) originated as abstractions from observed properties of the physical universe".[3]) Dit is waar dat die abstraksie ons soms baie ver van die konkrete werklikheid af voer, maar die resultaat is nooit die produk net van aktiwiteit binne die menslike denke nie. Ons kan dit vergelyk met die ruimtereisiger wat om die aarde wentel en van die aarde verwyder is, maar juis deur die aantrekkingskrag van die aarde in staat gestel word om in sy baan te beweeg.

Al sou ons probeer om 'n eenvoudige aksiomastelsel op te stel sonder om aan een of ander bepaalde konsep te dink, sal ons ons tog betrap dat ons so 'n konsep in gedagte gehad het — as ons ten minste eerlik is! Die abstraksie wat ons uiteindelik tot die formulering van so 'n aksiomastelsel bring, geskied gewoonlik in verskillende stadia. Aanvanklik word geïsoleerde verskynsels ondersoek. As ons dan by verskynsels wat op die oog af miskien weinig verband met mekaar het, gemeenskaplike eienskappe ontdek en gemeenskaplike metodes in ons ondersoek kan toepas, spits ons ons aandag toe op die bestudering van hierdie eienskappe. In hierdie studie word die gemeenskaplike eienskappe van die verskynsels geabstraheer.

Sodoende vind ons 'n abstrakte wiskundige struktuur, waarvan die eienskappe in die vorm van aksiomas geformuleer kan word. Hierdie veralgemening is geen vervaging nie, maar veel eerder 'n presisering en skerper omlyning van die betrokke eienskappe.[4]) Deur logiese redenering kan nou verdere eienskappe van die abstrakte struktuur afgelei word, en gedurende die afleiding van hierdie resultate is ons nie aan een of ander voorbeeld of verskynsel gebonde nie. Hierin lê die groot voordeel en waarde van die aksiomaties-deduktiewe metode. Nadat 'n resultaat eenmaal op hierdie ekonomiese wyse afgelei is, kan dit teruggekaats en toegepas word op elk van die verskynsels waarvan ons aanvanklik sekere gemeenskaplike eienskappe geabstraheer het.

Laat my toe om sodanige abstraksie vir u te illustreer aan die hand van 'n voorbeeld wat u in staat sal wees om te volg. Lengte, oppervlakte en volume word geabstraheer en veralgemeen tot die begrip *maat*. Sekere *eienskappe* van lengte, oppervlakte en volume word nou ten grondslag gelê van 'n (aksiomatiese) *definisie* vir die maat van 'n versameling (waarby nie aan 'n bepaalde dimensie of selfs enige dimensie gedink word nie). Vooraf moet ek egter eers enkele opmerkings oor versamelinge en bewerkings daarmee maak.

„Versameling" en „element" word hier as ongedefinieerde begrippe gebruik. Ons noem die versameling A 'n *deelversameling* van B as elke element van A ook 'n element van B is. Ons sê ook dat A bevat is in B of dat die versameling B die versameling A omvat. Onder die *deursnee* van 'n aantal versamelinge verstaan ons daardie elemente wat tot elk van die versamelinge behoort, d.w.s. die deursnee is die gemeenskaplike deel van die versamelinge. Die *vereniging* (vroeër ook soms *die som* genoem) van 'n aantal versamelinge is die versameling van al daardie elemente wat tot ten minste een van die gegewe versamelinge behoort. Sou 'n element tot meer as een versameling gehoort, word daardie element by die beskouing van die vereniging slegs een keer in aanmerking geneem. Ons spreek verder af dat ons sal praat van die *leë versameling* as ons te doen het met 'n versameling wat geen enkele element besit nie, bv. die versameling Krugerponde in my sak.

Die eienskappe wat nou in die definisie van 'n maat opgeneem word — en u sal hulle herken as eienskappe van lengte, oppervlakte en volume — is die volgende:

1. Die maat van 'n versameling is nooit negatief nie, en die maat van die leë versameling is nul.
2. Die maat van die vereniging van versamelinge sonder gemeenskaplike elemente is gelyk aan die som van die mate van die afsonderlike versamelinge.

Uit hierdie definisie kan nou verdere eienskappe van mate afgelei word — eienskappe wat vergelyk kan word met die van lengte, oppervlakte en volume. Met gemak kan ons byvoorbeeld aflei dat 'n maat monotoon is, d.w.s. as 'n versameling A bevat is in 'n versameling B, dan is die maat van A nie groter as die maat van B nie.

Uit die voorgaande behoort dit vir u duidelik te wees dat die wiskundige by die formulering van 'n stelsel aksiomas die eienskappe van een of ander model in gedagte het. Die toevlug word ook tot 'n model geneem wanneer dit om die nie-strydigheid van 'n aksiomastelsel gaan. U sal onthou dat die ideaal van Hilbert om in sy metawiskunde bewyse vir die nie-strydigheid van elke aksiomastelsel in die wiskunde te vind, deur Gödel omvergewerp is. Wanneer aan die ongedefineerde begrippe van 'n aksiomastelsel interpretasies toegeken word wat meebring dat die aksiomas ware beweringe word, word gesê dat 'n model van die aksiomastelsel gevind is. (Die formaliste wil natuurlik nie toegee dat 'n model die uitgangspunt is nie.) Wanneer so 'n model gevind kan word, aanvaar ook die formaliste dat hulle betrokke aksiomastelsel niestrydig is.

Nadat 'n aksiomastelsel langs die weg van abstraksie en veralgemening verkry is, kan een of meer van die aksiomas gewysig word of weggelaat word. Dit sal vanselfsprekend aanleiding gee tot nuwe resultate, verskillend van die wat uit die oorspronklike aksiomastelsel afgelei word. Hiervan het die geskiedenis van die wiskunde 'n uiters belangrike voorbeeld opgelewer.

U sal u herinner dat ek reeds gemeld het dat die Euclidiese meetkunde tot in die negentiende eeu die enigste meetkunde was. Eeue lank is daar deur wiskundiges vermoed dat die vyfde postulaat van Euclides nie onafhanklik is nie maar as stelling uit die ander aksiomas en postulate van sy stelsel afgelei kan word. Dit het hulle egter nie geluk om so 'n afleiding regstreeks te maak nie. Die weg wat dan ingeslaan kan word, is die volgende. Vervang die betrokke aksioma deur 'n ontkenning daarvan en stel vas of dit tot teenstrydige resultate lei.

Indien dit wel die geval is, beteken dit dat hierdie vervanging nie geregverdig was nie en gevolglik dat die oorspronklike aksioma wel as stelling uit die ander afgelei kan word.

Die betrokke aksioma van Euclides kom daarop neer dat deur 'n punt buite 'n gegewe lyn een en slegs een lyn getrek kan word wat ewewydig is aan die gegewe lyn. Lobachevsky en Bolyai het hierdie aksioma in die stelsel van Euclides vervang deur die volgende: Deur 'n punt buite 'n gegewe lyn gaan minstens twee lyne ewewydig aan die gegewe lyn. Tot teenstrydighede kon hulle egter nie kom nie. Die ontwikkeling van die resultate van hierdie nuwe aksiomastelsel het hulle omstreeks 1830 gepubliseer. Ná die dood van Gauss, in 1855, het uit sy geskrifte geblyk dat hy hierdie nuwe meetkunde (die hiperboliese meetkunde) onafhanklik van die ander twee wiskundiges ontwikkel het. In 1868 toon Beltrami aan dat die Euclidiese meetkunde en die hiperboliese meetkunde gelykwaardig is, waarmee bedoel word dat die geldigheid van die een die geldigheid van die ander impliseer.

Riemann ontwikkel teen 1854 'n tweede nie-Euclidiese meetkunde, nl. die elliptiese meetkunde. Hierin word veronderstel dat deur 'n punt buite 'n gegewe lyn geen lyn ewewydig aan die gegewe lyn getrek kan word nie. 'n Interpretasie hiervan word verkry as die ongedefinieerde begrip *lyn* vertolk word as 'n groot sirkel op 'n boloppervlak.

Omstreeks dieselfde tyd as die ontstaan van die nie-Euclidiese meetkundes vind die ontwikkeling van die meerdimensionale meetkundes plaas, waarby ruimtes met meer as drie dimensies bestudeer word. In dieselfde jaar (1844) publiseer Cayley sy *Chapters on analytical geometry in n dimensions* en Grassmann sy *Ausdehnungslehre.* Hier het ons weer 'n uitstekende voorbeeld van abstraksie en veralgemening. Veral van wysgerige kant was daar aanvanklik kritiek en verset sowel teen die nie-Euclidiese meetkundes as teen die meerdimensionale meetkundes, omdat dit in stryd met die ervaring geag is. 'n Meerdimensionale meetkunde het later geblyk toepassinge te hê in die relatiwiteitsteorie. Die aanvanklike wantroue verdwyn dan ook geleidelik, en in die tweede helfte van die negentiende eeu word die Aristoteliese eis van selfevidensie van aksiomas en grondbegrippe laat vaar.

By die ontwikkeling en uitbreiding van die getalbegrip word dieselfde gang van sake aangetref. Negatiewe getalle is aanvanklik as onmoontlik beskou. Aan die Indiërs was negatiewe getalle omstreeks die jaar 1100 reeds bekend. Die woord wat hulle daarvoor gebruik het, toon ooreenkoms met die woord *skuld*. Negatiewe getalle is deur hulle in verband gebring met die ervaring. In Europa is negatiewe getalle eers in die sewentiende eeu algemeen aanvaar.

Al moet ons onderskei tussen die oorsprong van 'n teorie en die uiteindelike vorm wat dit aangeneem het, kan die tussenskakels van abstraksie en veralgemening nie daarmee verbreek word nie. Tereg beweer O. Kooi: „Dat de wiskundige zich van de werkelijkheid distancieert is... veelal schijn. Hij maakt zich vrij van wat men op een gegeven moment onder de werkelijkheid verstaat en krijgt, aldus doende, de kans nieuwe, tot dusver onbekende gebieden te ontdekken. Men zou hem kunnen vergelijken met Columbus, die zich ‚distancieerde' van de toenmaals bekende ‚werkelijkheid' en het onbekende Amerika ontdekte".[5]) En elders sê hy: „Een abstracte terminologie... heeft het voordeel, dat men niet a priori *gebonden* is aan een bepaalde interpretatie van het systeem. En tijdens de opbouw daarvan wordt de aandacht niet onnodig afgeleid van de logische samenhang in het systeem. Ondanks deze voordelen heeft de wiskundige bij de opbouw van een logisch systeem toch meestal minstens één interpretatie voor ogen, om zekerheid te hebben dat zijn systeem tot resultaten zal leiden, die iets met de ervaring te maken hebben. De gebondenheid van de mathematicus aan de ervaring is meestal groter, dan hij zelf misschien zou willen toegeven".[6])

Die weg wat ons inslaan by die ontplooiing van 'n wetenskap in die onderrig daarvan, is in die algemeen nie dieselfde as die weg wat afgelê is in die historiese ontstaan, groei en uitbouing van daardie wetenskap nie. Dit is egter wenslik om die leer waarlangs ons opgeklim het, nie uit die oog te verloor nie. J. W. L. Glaisher beweer: „I am sure that no subject loses more than mathematics by any attempt to dissociate it from its history".[7]) En P. Lax sê abstraksie is „an indispensable tool for the simplification, clarification and unification of the ever increasing body of mathematical knowledge. But abstraction should not be used to cut off mathematics from its sources".[8])

In die onderrig van die wiskunde behoort abstraksie dan ook nie ingevoer te word voordat dit nodig is nie. En wanneer dit geskied, is dit wenslik om dit te motiveer aan die hand van voorbeelde waaruit die abstrakte begrip ontstaan het.

Hierdeur word die student in staat gestel om dit beter te begryp. Dit is veral in die hoëre wiskunde (d.w.s. op nagraadse vlak) waar abstraksie so 'n belangrike rol speel. Natuurlik word dit veel eerder reeds teëgekom — dink maar aan die ontwikkeling van die getalbegrip op skool. C. V. Newsom beweer dat 'n kursus iets anders as wiskunde word wanneer daar nie aandag geskenk word aan die abstraksie, wat die wiskunde karakteriseer nie.[9])

Abstraksie en die veralgemening wat daarmee gepaard gaan, is die belangrikste eienskap van die moderne wiskunde. Nogtans meen ek dat ek vir u aangetoon het dat die ontwikkeling van die wiskunde in die verlede gestimuleer is en steeds gestimuleer word deur die tegniek en ook deur ander wetenskappe, die sg. ervaringswetenskappe. Nuwe tegniese ontwikkelings stel steeds nuwe eise aan die wiskunde. Tussen wiskunde en die ervaring is daar m.i. 'n wisselwerking. Wiskunde is vir sy groei nie alleen van die vraag daarna afhanklik nie. Wiskundige ontwikkelings het meermale na verloop van geruime tyd geblyk verrassende toepassings te hê. En vordering op die gebied van die wiskunde stel die tegniek tot groter prestasies in staat. Hiermee pleit ek geensins vir 'n beoefening van die wiskunde ter wille van die wiskunde nie, maar sien dit as gehoorsaamheid aan 'n Godgegewe roeping en taak tot kultuurontplooiing, met die verheerliking van sy Naam as diepste grond van al ons arbeid.

P.U. vir C.H.O. B. C. Strydom.

VERWYSINGS EN BRONNE

1. D. J. Struik: A concise history of mathematics, Dover Publications, Inc., New York, 1948, p. 15.
2. R. L. Wilder: Introduction to the foundations of mathematics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960, p. 6.
3. The National Council of Teachers of Mathematics: Insights into modern mathematics, Twenty-third yearbook, Washington, D.C., 1957, p. 420.
4. E. T. Bell: The development of mathematics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1945, p. 187.
5. O. Kooi: De vrijheid van de wiskundige, Referaat voor de tweeënveertigste Wetenschappelijke samenkomst op woensdag 6 juli 1960, p. 22.
6. Idem, p. 14.
7. F. Cajori: A history of mathematics, The Macmillan Co, New York, 1953, titelpagina.
8. R. W. Ritchie (red.): New directions in mathematics, Darmouth College Mathematical Conference — Nov. 3—4, 1961, p. 113.
9. Insights[3]), p. 1.